MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A VIII-A

I. a) Fie $a=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots+\sqrt{2^{2009}}$ şi $b=2^{1005}-\sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului real $\frac{a}{b}$.

b) Demonstrați că, pentru orice pereche de numere raționale a şi b, numărul
$A=\frac{1-a\cdot\left(4\sqrt{3}-7\right)}{a+4\sqrt{3}+7}-4\cdot\frac{1-b\left(\sqrt{3}-2\right)}{b+\sqrt{3}+2}$ este întreg.

Supliment cu exerciții G.M., iunie 2009

II. a) Arătați că dacă *a,b,c* sunt numere raționale astfel încât $ab+ac+bc=2010$ atunci
$\sqrt{\left(a^2+2010\right)\left(b^2+2010\right)\left(c^2+2010\right)}\in Q$.

b) Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{ab2}, \overline{bc7}, \overline{ca8}$ este 3, demonstrați că numărul $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ este un număr irațional.

G.M./2008

III. a) Demonstrați că $2\left(x^2+y^2\right)\geq\left(x+y\right)^2$, pentru oricare x şi y numere reale.

b) Dacă a,b,c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic şi d_1 , d_2, d_3 sunt lungimile diagonalelor fețelor paralelipipedului, demonstrați că $\left(a+b+c\right)\cdot\sqrt{2}.\leq d_1+d_2+d_3$ În ce condiții are loc egalitatea?

RMT /2007

IV. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime 1cm.

a) Arătați că $BD\perp A'C$.

b) Dacă $Q\in\left(A'C\right)$ astfel încât $\frac{C'Q}{A'Q}=\frac{1}{3}$, determinați distanța de la A' la OQ.

c) Determinați lungimea segmentului $\left(A'M\right)$, unde $M\in\left(A'C\right)$, astfel încât aria triunghiului BMD să fie minimă.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.